Mathématiques : PARTIE I

Exercice 1 : automatismes (5 points)
Sans calculatrice Durée : 20 minutes

	Énoncé	Réponse
1)	Un objet coûte 500 €. Il augmente de 20 %. Quel est son nouveau prix ?	
2)	Résoudre dans **R** l'équation $7x - 20 = 2x + 15$.	
3)	Calculer l'indice correspondant à un prix de 500 €.	<table><tr><td>Prix (en €)</td><td>250</td><td>500</td><td>750</td></tr><tr><td>Indice</td><td>100</td><td></td><td></td></tr></table>
4)	Le prix d'une veste est passé de 80 à 64 €. Quel pourcentage de réduction a-t-il subi ?	
5)	Un prix augmente de 10 % puis de 20 %. Quelle est l'évolution globale de ce prix ?	
6)	Après avoir augmenté le prix d'un article de 20 %, le vendeur décide de le baisser de 20 %. Quelle évolution aura subi le prix de cet article ?	
7)	Un prix baisse de 50 %. Quel est le taux réciproque associé ?	
8)	Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2x^2 - 8$. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -6 par f.	
9)	Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = -4x + 20$.	Le tableau de signes de $f(x)$ est :
10)	Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = (-4x + 20)(x + 6)$.	Le tableau de signes de $g(x)$ est :

Mathématiques : PARTIE II

Calculatrice autorisée
Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 2 (5 points)

Ambre a été embauchée dans une entreprise de climatisation, le 1er janvier 2015. Elle commence avec un salaire mensuel de 2200 euros, puis son salaire mensuel augmente de 2 % chaque premier janvier.

On modélise son salaire mensuel en euros par une suite u où $u(n)$ correspond au salaire au premier janvier de l'année $2015 + n$. Ainsi $u(0)$ = 2200.

Ainsi $u(0)$ = 2200.

1. Calculer $u(1)$ et $u(2)$.
2. Exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$. Quelle est la nature de la suite u ?
3. Calculer le salaire mensuel d'Ambre en 2020, arrondi à l'unité.
4. Ambre souhaite savoir à partir de quelle année son salaire aura augmenté d'au moins 50 % par rapport à son salaire de 2015.

   a) Compléter le programme ci-dessous, écrit en langage Python, afin, qu'après exécution, la variable n donne la réponse à la question d'Ambre.

```
n = 2015
u = 2200
while u < ………. :
        n =…………..
        u = …………
```

   b) Déterminer à partir de quelle année le salaire d'Ambre aura augmenté d'au moins 50 % par rapport à son salaire de 2015.

Exercice 3 (5 points)

On veut mesurer la profondeur d'un puits en y lâchant une pierre et en mesurant le temps écoulé entre le lâcher de la pierre et la perception par l'opérateur du bruit qu'elle fait en touchant le fond du puits.

Il faut prendre en compte deux phénomènes :

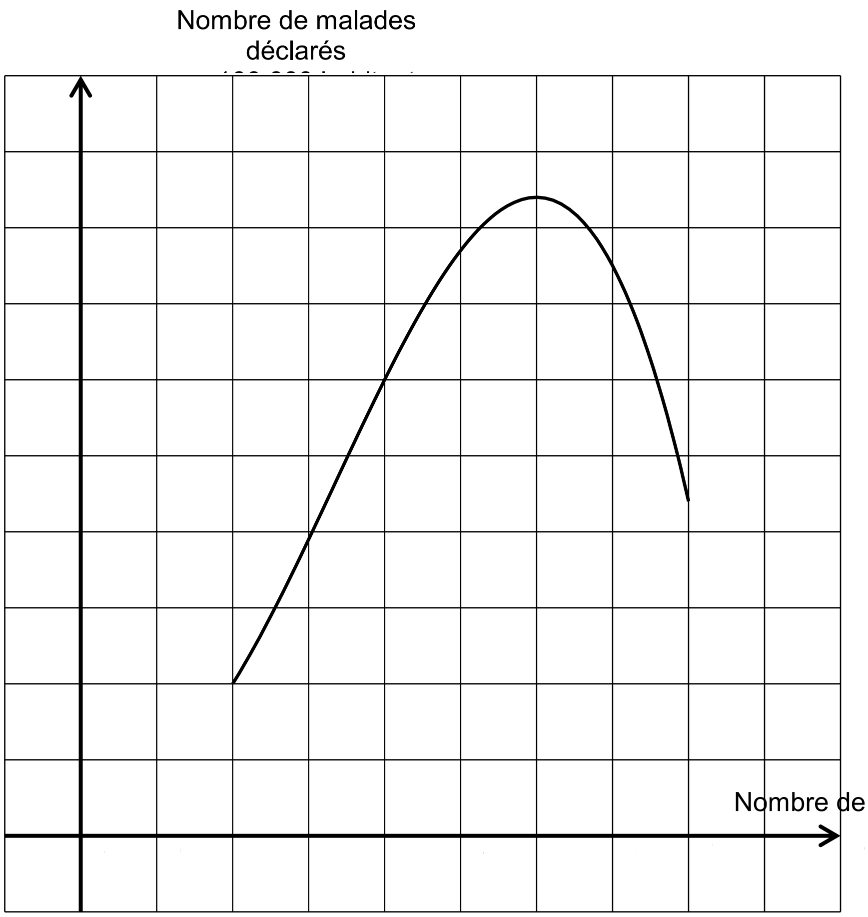
- D'abord, la pierre met un certain temps pour toucher le fond.
  En chute libre sans vitesse initiale, la distance parcourue par un objet s'exprime, en fonction du temps, par la formule $d = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ où t est le temps exprimé en seconde, d la distance exprimée en mètre et g l'accélération de la pesanteur sur terre exprimée en m. s $^{-2}$.
- Ensuite, le bruit que fait la pierre en touchant le fond remonte jusqu'à l'opérateur à la vitesse V du son.

Dans le cas étudié, les conditions expérimentales permettent de se placer dans un modèle où $g = 10$ m. s $^{-2}$ et $V = 320$ m. s $^{-1}$
Il s'écoule 4,25 s entre le moment où l'opérateur lâche la pierre et le moment où il entend le bruit. On note t_1 le temps mis par la pierre pour tomber au fond du puits et t_2, le temps mis par le son pour remonter. On a donc $t_1 + t_2 = 4{,}25$.
On note l la profondeur du puits.

1. Justifier que $l = 5\, {t_1}^2$ et que $l = 320\, t_2$.
2. Montrer que l'on a $5\, t_1^2 + 320\, t_1 - 1360 = 0$. (On pourra exprimer t_2 en fonction de t_1)
3. On considère la fonction P définie par $P(t) = 5(t+68)(t-4)$.
   a) Donner les racines de $P(t)$ puis développer l'expression $P(t)$.
   b) En déduire la valeur de t_1.
4. Calculer la profondeur du puits.

Exercice 4 (5 points)

Dans une ville de 100 000 habitants, on s'intéresse au nombre de malades atteints de la grippe en 2018, en fonction du temps écoulé depuis l'apparition de l'épidémie saisonnière de grippe.
On admet qu'entre la deuxième et la huitième semaine, la fonction f définie sur [2 ; 8] par $f(t) = -10t^3 + 100t^2 - 120t + 120$ modélise le nombre de malades déclarés en fonction du nombre t de semaine écoulées.
On donne ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f.



1. A l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.
   a) Selon ce modèle, quel est le nombre de malades au bout de 4 semaines ?
   b) Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur à 600.

2. Démontrer que $f'(t) = -30(t - \frac{2}{3})(t - 6)$ pour tout t de $[2\,;8]$.
3. Etudier le signe du polynôme $f'(t)$ sur $[2\,;8]$.

4. Au bout de combien de semaines le pic de l'épidémie (c'est-à-dire le moment où le nombre de malades est maximal) a-t-il été atteint ? Quel est alors le nombre de malades déclarés ?